Zápočtový test z MA2, varianta B **9. 5. 2017**

1. Určete tečné roviny k plochám

$$z = \ln\sqrt{x^2+2y^2} \quad \text{a} \quad 2x^2+3y^2+z^2=2$$

v bodě $(x,y,z)=(1,0,0)$ a určete úhel, který svírají.

Řešení:
Plochy jsou implicitně zadané pomocí funkcí

$$\Phi_1(x,y,z) = \ln\sqrt{x^2+2y^2} - z$$

$$\Phi_2(x,y,z) = 2x^2+3y^2+z^2-2\ .$$

Normálové vektory tečných rovin pro jednotlivé plochy jsou

$$\vec{n}_1 = \text{grad } \Phi_1(1,0,0) = \left(\frac{x}{x^2+2y^2}, \frac{2y}{x^2+2y^2}, -1\right)_{|(1,0,0)} = (1,0,-1)$$

$$\vec{n}_2 = \text{grad } \Phi_2(1,0,0) = \Big(4x, 6y, 2z\Big)_{|(1,0,0)} = (4,0,0)$$

Tečné roviny jsou tedy postupně $x-z=1$ a $x=1$. Úhel $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$, který svírají plochy je dán jako

$$\cos\alpha = \frac{\left|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2\right|}{||\vec{n}_1|| \cdot ||\vec{n}_2||} = \frac{4}{\sqrt{2}\cdot 4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

tedy $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

2. Najděte lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$$

pro $x>0$ a $y>0$.

Řešení:
Nutnou podmínkou pro lokální extrém v daném bodě je nulovost první derivace:

$$f'(x,y) = \left(y - \frac{50}{x^2},\ x - \frac{20}{y^2}\right)$$

Tedy $f'(x,y)=0$ právě když $y=\frac{50}{x^2}$ a $x=\frac{20}{y^2}$. Tedy $x = 20\frac{x^4}{50^2} = \frac{x^4}{125}$ a protože $x>0$, dostaneme $(x,y)=(5,2)$. V tomto kritickém bodě dále vyšetříme druhou derivaci:

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{100}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{40}{y^3} \end{pmatrix}$$

Pro $(x,y)=(5,2)$ je

$$f''(5,2) = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Podle Sylvestrova kritéria ($\Delta_1 = \frac{4}{5} > 0$, $\Delta_2 = 4 - 1 = 3 > 0$) je forma daná druhou derivaci pozitivně definitní a tedy v daném bodě je lokální MINIMUM.

3. Vhodným způsobem integrace spočítejte integrál

$$\iint\limits_E \sqrt[3]{1 - x^2 - y^2}\ dS$$

kde $E: \quad x^2 + y^2 \leq 4$. Jaké má hodnota integrálu znaménko?

Řešení:
Oblast E je kruhu o poloměru 2. Použijeme proto polární souřadnice

$$\Phi : x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

a oblast parametrizujeme množinou

$$U: \quad 0 \leq r \leq 2 \quad \& \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$\iint\limits_{E=\Phi(U)} \sqrt[3]{1 - x^2 - y^2}\ dS = \iint\limits_U r \cdot \sqrt[3]{1 - r^2}\ dr\ d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^2 r \cdot \sqrt[3]{1 - r^2}\ dr\ d\varphi =$$

$$= \left(\int\limits_0^2 r \cdot \sqrt[3]{1 - r^2}\ dr\right) \cdot \left(\int\limits_0^{2\pi} 1\ d\varphi\right) = 2\pi \cdot \Big[-\frac{3}{8}(1 - r^2)^{4/3} \Big]_{r=0}^{r=2} = \frac{3\pi}{4} \cdot \left(1 - \sqrt[3]{81}\right) < 0\ .$$